1 GİRİŞ

1.1 Kümeler ve Fonksiyonlar

Bir küme, iyi tanımlanmış cisimlerin bir ailesi olarak alınacaktır. Kümedeki cisimlere, elemanlar veya noktalar denilecektir. x bir S kümesinin elemanı ise $x \in S$, elemanı değil ise $x \notin S$ ile gösterilecektir.

Kümeler, elemanlar açıkça listelenerek küme parantezi içinde (örneğin, $\{a, b, c\}$) veya elemanlar, verilen bir P koşulu ile belirleniyorsa $\{x \mid x \in P\}$ ile gösterilirler. (Örneğin, $\{x \mid x$, bir mavi kuştur.$\}$, elemanları bütün mavi kuşlar olan kümeyi göstermektedir).

S kümesindeki her eleman, T kümesinin de bir elemanı ise S'ye T'nin bir alt kümesi denir ve $S \subset T$ ile gösterilir. ($\forall x \in S$ için $x \in T$ ise $S \subset T$.) Tamamen aynı elemanları içeren iki kümeye eşit denir. Yani, $S \subset T$ ve $T \subset S$ ise $S = T$ dir. $\not\subset$ işareti ile alt küme olmamayı göstereceğiz.

Eleman içermeyen küme, boş küme olarak tanımlanır ve $\emptyset$ (veya $\{\}$) ile gösterilir. Boş küme, her kümenin alt kümesidir.

S ve T herhangi iki küme olmak üzere T'de S'nin bütünleyeni, $T - S$ ile gösterilir ve S'nin elemanı olmayan T'deki bütün elemanların kümesi olarak tanımlanır.

İki kümenin birleşimi ve kesişimi

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

olarak tanımlanır. $A \cap B = \emptyset$ ise A ile B ayrıktır denir. Daha genel olarak $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, bir I kümesi tarafından indekslenmiş kümeler ailesi olmak üzere, I'ya indeks kümesi denir, kesişim ve birleşim tanımı,

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \text{en az bir } \alpha\in I \text{ için } x\in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \text{her } \alpha\in I \text{ için } x\in A_\alpha\}$$

ile verilir.

Bir X kümesinin bütün alt kümeler ailesi 2^X veya $P(X)$ ile gösterilir. $\{A_\alpha\}$, bir X kümesinin alt kümeler ailesi olsun. De Morgan kuralı;

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^c = X - \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) = \bigcap_\alpha A_\alpha^c,$$

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^c = X - \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X - A_\alpha) = \bigcup_\alpha A_\alpha^c.$$

(Burada, $A^c = X - A$ dır.) $I = \mathbb{N}$ (sayılabilir) ise $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{A_n\}_{n=1}^\infty = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ ile gösterilirler.

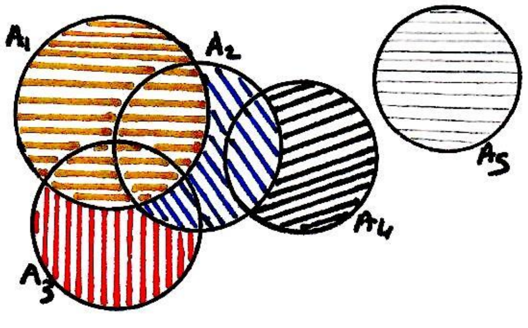
Bazı Özellikler

1) $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ azalan bir dizi oluşturan kümeler ailesi ve $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ ise $A_1 = A \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots = A \cup \bigcup_{n=1}^\infty (A_n - A_{n+1})$ dir.

2) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ artan bir dizi oluşturan kümeler ailesi ve $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ ise $A = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots = A_1 \cup \bigcup_{n=1}^\infty (A_{n+1} - A_n)$ dir. (Artan bir dizi oluşturmak demek $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ demektir.)

3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ için A_n ayrık kümeler ve $B_n = \bigcup_{j=n}^\infty A_j$ ise $\bigcap_{n=1}^\infty B_n = \emptyset$ ve $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ dir.

4) $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ ise $A = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup [A_3 - (A_1 \cup A_2)] \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^\infty \left[A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right]$ dir.



$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$$
$$= A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup [A_3 - (A_1 \cup A_2)] \cup [A_4 - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)] \cup [A_5 - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)]$$

Veya $B_n = A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ denirse $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ dir. Burada, sağ taraftaki birleşimde bulunan B_n kümeleri ayrıktır.

Bağıntı ve Fonksiyonlar

A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B'nin <u>kartezyen çarpımı</u> $a\in A$ ve $b\in B$ olmak üzere bütün sıralı (a,b) çiftlerinin kümesi olarak tanımlanır ve $A\times B$ ile gösterilir. Yani

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

dır.

$A\times B$'nin herhangibir R alt kümesine, A ile B arasındaki bir <u>bağıntı</u> denir. $A\times A$'nın bir alt kümesine, A üzerinde bir bağıntı denir. $R\subset A\times B$ (Yani R, $A\times B$'nin bir alt kümesi demek A ile B arasında bir bağıntı olması demek) ise $(a,b)\in R$ veya aRb ile yazılır. Buna a ve b, R bağıntılıdır denir. (Bağıntı $\sim$ notasyonu ile gösterilirse, yani $\sim\subset A\times B$ ise, $a\sim b$ yazılır.)

Bir X kümesinden bir Y kümesine bir <u>fonksiyon</u>, X'in her elemanına, Y'nin yalnız ve yalnız bir f bağıntısını karşılık getiren X ile Y arasındaki bir bağıntıdır. Yani $f\subset X\times Y$

i) $\forall x\in X,\ \exists y\in Y\quad (x,y)\in f$

ii) $(x,y_1)\in f,\ (x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$

ise f'ye X'den Y'ye bir fonksiyon denir. $(x,y)\in f$ ise alışılagelmiş notasyon ile $y=f(x)$ yazılır. Fonksiyonlara, tasvir de denir.

f, X'den Y'ye bir fonksiyon ise X'e f'nin <u>tanım kümesi</u>, Y'ye de <u>görüntü (değer) kümesi</u> denir. $Z\subset X$ ise f'nin Z'ye <u>kısıtlanmışı</u>, $f|_Z$ ile gösterilir, her $x\in Z$ için $f|_Z(x)=f(x)$ ile tanımlanan Z'den Y'ye bir fonksiyondur. (f fonksiyonuna da $f|_Z$'nin bir <u>genişlemesi</u> denir.)

f, X'den Y'ye bir fonksiyon, $A\subset X$ ve $B\subset Y$ ise A kümesinin <u>görüntüsü</u>

$$f(A)=\{y\in Y\mid x\in A \text{ için } y=f(x)\}$$

B kümesinin <u>ters görüntüsü</u>

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$$

dir.

$f(X)=Y$ ise f'ye üzerine (örten) denir. Her $x_1 \neq x_2$ elemanları için $f(x_1)\neq f(x_2)$ ise f'ye 1-1 (bire-bir) fonksiyon denir. f fonksiyonu bire-bir ve üzerine ise ters fonksiyonu vardır ve $f^{-1}(x)$ ile gösterilir. f^{-1} fonksiyonu, Y'den X'e giden bir fonksiyondur. ($f: X\to Y$, $f^{-1}: Y\to X$. $f\circ f^{-1}=I_Y$ ve $f^{-1}\circ f=I_X$ dir. Burada $I_Y(y)=y$, $I_X(x)=x$ dir.)

Teorem: $f: X\to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, X'de herhangi bir kümeler ailesi ise

a) $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

b) $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\subset\bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$ (f, 1-1 ise eşitlik sağlanır.)

dir.

Teorem: $f: X\to Y$ bir fonksiyon ve $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$, Y'de bir kümeler ailesi ise

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$

dir.

Teorem: $f: X\to Y$ bir fonksiyon, $A\subset X$ ve $B\subset Y$ ise

a) $f^{-1}(f(A))\supset A$ (f, bire-bir ise eşitlik sağlanır.)

b) $f(f^{-1}(B))\subset B$ (f, üzerine ise eşitlik sağlanır.)

c) $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$

dir.

Kısmi ve Tam Sıralama

Bir A kümesi üzerinde, bir R ($\leq$) bağıntısı,

1) $\forall a\in A$, aRa ($a\leq a$ veya $(a,a)\in R$) (Yansıma: Reflexive)

2) aRb, $bRa \Rightarrow a=b$ (Ters Simetri: Antisymmetric)

3) aRb, $bRc \Rightarrow aRc$ (Geçişme: Transitive

şartlarını sağlarsa, A üzerinde bir kısmi sıralama denir. A kümesi üzerinde bir kısmi sıralama verilmişse A'ya kısmi sıralı küme denir.

Kısmi sıralama bağıntısını $\leq$ sembolü ile de gösterebiliriz.

Örnek: X bir küme ve 2^X, X'in bütün alt kümeler ailesi olsun. 2^X üzerinde R bağıntısı $\subset$ (kapsama) olarak alındığında, $\subset$ bir kısmi sıralamadır.

Kısmi sıralı kümeyi $(X, \leq)$ ile gösterelim. Kısmi sıralı bir A kümesi üzerinde, herhangi iki eleman a ve b için $a \leq b$ veya $b \leq a$ oluyorsa, bu kısmi sıralamaya tam sıralama denir.

Örnek: $\mathbb{R}$ gerçel (reel) sayılar kümesi üzerinde "küçük veya eşit", "$\leq$" bir kısmi sıralamadır. Bu kısmi sıralama, ayrıca tam sıralamadır. 2^X üzerindeki $\subset$ (kapsama) bağıntısı ise tam sıralı değildir.

Gerçel sayılar kümesi üzerindeki "küçük veya eşit" bağıntısı bir kısmi sıralamanın ilk örneği olduğu için, aksi belirtilmediği sürece kısmi sıralama bağıntısını $\leq$ ile göstereceğiz.

$(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $Y \subset X$ olsun. Herhangi $y, y' \in Y$ elemanlarını X'in elemanları olarak düşündüğümüzde $y \leq y'$ ile Y kümesini $\leq$ ile kısmi sıralanmış olarak düşünebiliriz. Bu sıralamaya, X tarafından Y'de doğrulan sıralama denir.

$(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $Y \subset X$ olsun. X'in bir u elemanı, her $y \in Y$ için $y \leq u$ şartını sağlıyorsa, Y için bir üst sınır denir. X'in bir v elemanı, her $y \in Y$ için $v \leq y$ şartını sağlıyorsa da Y için bir alt sınır denir. X'in bir $\ddot{u}$ elemanı, Y'nin herhangibir u üst sınırı için $u \leq \ddot{u}$ ve $\ddot{u}$, Y'nin bir üst sınır şartını sağlıyorsa, Y için bir en küçük üst sınır (sup) denir. En büyük alt sınır (inf) benzer şekilde tanımlanır.

Örnek: $\leq$, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde, "küçük veya eşit" bağıntısı ile bir kısmi sıralama ve $Y = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \leq \sqrt{2}\}$ kümesi olsun. 3, Y için bir üst sınırdır. $\sqrt{2}$ rasyonel sayı olmadığından, Y'nin $\mathbb{Q}$'da en küçük üst sınırı yoktur. (Y'nin $\mathbb{R}$'de en küçük üst sınırı ise $\sqrt{2}$ dir.)

Y, bir kısmi sıralı küme $(X, \leq)$'nin bir alt kümesi olsun. Y'nin bir u elemanı, her $y \in Y - \{u\}$ için $u \nleq y$ şartını sağlıyorsa, Y'de maksimal denir.

Y'nin bir v elemanı, her $y \in Y-\{v\}$ için $y \nleq v$ şartını sağlıyorsa, Y'de minimal denir. u, X'de bir maksimal (minimal) eleman ise, X'in u elemanına X'de maksimal (minimal) denir.

Örnek: $\mathbb{R}$'de $Y=\{1,3,8\}$ kümesi verilsin. 8, Y'de maksimal ve 1, Y'de minimaldir. $\mathbb{R}$, maksimal ve minimal eleman içermez.

2) $2^{\mathbb{R}}$ kümesinde, kısmi sıralama $\subset$ (kapsama) bağıntısı ve $Y=\{\{1\},\{3\},\{8\}\}$ olsun. Y'nin her elemanı hem maksimal hem de minimaldir. $2^{\mathbb{R}}$'de $\mathbb{R}$ maksimal ve $\emptyset$ minimal elemandır.

$(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin bir Y alt kümesi, $\leq$ ile doğrulan sıralamaya göre tam ise Y'ye X'de bir zincir (chain) denir. Yani Y, X'de bir zincir ise herhangi $y, y' \in Y$ elemanları için $y \leq y'$ veya $y' \leq y$ dir.

Örnek: $X=\{1,2,3,4,5\}$ ve 2^X, X'in bütün alt kümeler ailesi olsun. 2^X, $\subset$ (kapsama) bağıntısı ile verilen kısmi sıralı kümesinde

$$\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},X\}$$

bir zincirdir.

Genel Kartezyen Çarpım

X herhangibir küme olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x:\{1,2,\cdots,n\} \to X$ fonksiyonuna X'in n-li elemanı denir. $x(i)$, $(i=1,2,\cdots,n)$, x_i ile gösterilir ve i. koordinat olarak adlandırılır. x fonksiyonu, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ olarak da yazılabilir.

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ keyfi kümeler ve $X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olsun. $A_1, A_2, \cdots, A_n$'nin kartezyen çarpımı, $\prod_{i=1}^{n} A_i$ veya $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ile gösterilir ve X'in $x_i \in A_i$ şartını sağlayan bütün n'li elemanlarını içeren küme olarak tanımlanır. Yani

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x:\{1,2,\cdots,n\} \to X,\ x_i \in A_i\}.$$

Örnek: $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olsun. $x:\{1,2\} \to X = A \cup B$, $x(1) \in A$, $x(2) \in B$

$$A \times B = \{x \mid x:\{1,2\} \to A \cup B,\ x(1)=x_1=a \in A,\ x(2)=x_2=b \in B\}$$
$$= \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$x: \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna (bu bir dizidir) X'in w'lu elemanı denir. x'in i'deki değeri $x(i)=x_i$ ile gösterilir. Buna x'in i. koordinatı denir. Genellikle,

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak yazılır. $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ kümelerinin <u>kartezyen çarpımı</u> $\prod_{i=1}^{\infty}A_i$ ile gösterilir ve $\forall i$ için $x_i\in A_i$ olmak üzere X'in bütün ω'lu elemanlarının kümesi olarak tanımlanır. $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{\infty}A_i=\{x \mid x:\mathbb{N}\to\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X\ ,\ x_i\in A_i\}.$$

I indis kümesi olmak üzere $x:I\to X$ fonksiyonuna X'in I'lı elemanı denir. $\forall\alpha\in I$ olmak üzere x'in α'daki değeri $x(\alpha)=x_\alpha$ ile gösterilir. Genellikle $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ olarak yazılır. $\alpha\in I$ olmak üzere, A_α kümelerinin <u>kartezyen çarpımı</u> $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$ ile gösterilir ve $\forall\alpha\in I$ için $x_\alpha\in A_\alpha$ olmak üzere X'in bütün I'lı elemanlarını içeren küme olarak tanımlanır. Yani, $X=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ olmak üzere

$$\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid x:I\to X\ ,\ x_\alpha\in A_\alpha\}.$$

Seçim Aksiyomu; Zorn's Lemma; Zermelo's Lemma

Kümeler teorisinin en temel aksiyomlarından biridir. Doğru aksiyom olarak bilinir ve ispotlanmaz. Birbirine denk olan birçok ifadesi vardır. Bu aksiyom gözardı edildiğinde, matematiğin en az %70 i kullanılamaz hale geliyor.

Seçim Aksiyomu: I) $\alpha\in I$ için $\{A_\alpha\}$ boş olmayan kümelerin bir ailesi olsun. Her $\alpha\in I$ için $x(\alpha)\in A_\alpha$ olacak şekilde I'dan $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$'ya bir x fonksiyonu vardır.

II) Boş olmayan, ikişer ikişer ayrık $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ boş olmayan kümeler ailesi verilsin. Her A_α kümesinden yalnızca bir eleman içeren bir S kümesi vardır.

III) $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ boş olmayan kümeler ailesi olsun. Her $\alpha\in I$ için $A_\alpha\neq\emptyset$ ise $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\emptyset$ dir.

Seçim aksiyomuna denk olan diğer bir teorem:

Zorn's Lemma: $(X,\leq)$ kısmi sıralanmış kümesinde her zincirin bir üst sınırının olduğunu kabul edelim. Bu durumda, X bir maksimal eleman içerir.

İyi Sıralanmış Kümeler: (Well-order sets): $(\mathbb{N}, \leq)$ kısmi sıralı kümesini ve $\mathbb{N}$'nin herhangibir $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesini düşünelim. Eğer $A \neq \emptyset$ ise minimal (en küçük elemana) sahiptir. Bu özellik $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ veya $(\mathbb{R}, \leq)$ kısmi sıralı kümeleri için doğru değildir. Örneğin, $A = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$ kümesi minimal elemana sahip değildir.

Bir $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesine, X'in boş kümeden farklı her A kümesi bir minimal elemana sahipse, <u>iyi sıralanmış</u> (well-ordered) denir.

Bazı Özellikler:

Herhangi iyi sıralanmış küme, tam sıralıdır.

İyi sıralanmış kümenin en büyük elemanı olabilir veya olmayabilir.

İyi sıralanmış kümenin en küçük elemanı vardır. (Birinci eleman) Genelde 0 ile gösterilir. Bu durumda her $x \in X$ için $x \geq 0$ dır.

Zermelo's Lemma: Herhangi bir küme iyi sıralanabilir. Yani, X'in iyi sıralanması için X üzerinde bir $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı bulabiliriz.

Bu teoremde seçim aksiyomuna denktir.

Denklik Bağıntısı; Denklik Sınıfları

Bir A kümesi $(A \times A)$ üzerinde, bir R $(\sim)$ bağıntısı,

1) $\forall a \in A$, aRa $[a \sim a$ veya $(a,a) \in R]$ (Yansıma)

2) $aRb \Rightarrow bRa$ $[a \sim b \Rightarrow b \sim a$ veya $(a,b) \in R$ ise $(b,a) \in R]$ (Simetri)

3) aRb, $bRc \Rightarrow aRc$ $[a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ veya $\ldots]$ (Geçişme)

şartlarını sağlarsa, A üzerinde bir <u>denklik bağıntısı</u> denir. Denklik bağıntısı, genelde, $\sim$ sembolü ile gösterilir. Eğer aRb $(a \sim b)$ ise a ve b denktir denir.

Örnekler: 1) Bir düzlemdeki bütün üçgenlerin kümesi A olsun. "Benzer olma", A üzerinde bir denklik bağıntısıdır. A üzerinde başka bir denklik bağıntısı, "aynı alana sahip olma" dır.

2) Herhangibir A kümesi için, köşegen $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\} \subset A \times A$ bir eşitlik bağıntısıdır ve A üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

3) Doğal sayılar kümesinde, $\{(x,y) \mid x \equiv y \pmod 2\}$, bir denklik bağıntısıdır. ($x-y$ çift olması demektir.)

Arakesitleri boş, birleşimleri bir X kümesini veren, kümeler ailesine, X'in bir <u>ayrışımı</u> (<u>parçalanışı</u>, partition) denir. (Veya; X'in bir P alt kümeler ailesi, X'in her elemanı yalnız ve yalnız P'nin bir elemanı tarafından içeriliyor şartını sağlıyorsa, X'in bir ayrışımı denir.)

Örnek: $X=\{a,b,c,d\}$ kümesinin bir ayrışımı $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$ ve başka bir ayrışımı $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ dir.

$\sim$, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $a \in A$ için $[a]=\bar{a}=\{b \in A \mid b \sim a\}$ alt kümesine a'nın <u>denklik sınıfı</u> denir.

Teorem: $\sim$, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda

i) $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

ii) $a \sim b$ ise $[a]=[b]$

iii) $a \nsim b$ ise $[a] \cap [b] = \emptyset$ dir.

Teorem: Bir X kümesinde her ayrışım, bir denklik bağıntısı tanımlar. Tersine her denklik bağıntısı, bir ayrışım oluşturur. (Ayrışıma ait kümeler denklik sınıflarıdır.)

Örnek: $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ ve $\sim=\{(m,n) \mid m-n$ üç ile tam bölünür$\}$ ise $\sim$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$[0]=[3]=[15]=\{b \mid b \sim 0\}=\{b \mid b-0=b$ üçe tam bölünen sayılar$\}=\{0,3,6,9,\cdots\}$

$[1]=\{1,4,7,\cdots\}$, $[2]=\{2,5,8,\cdots\}$.

*) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n] = [0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{N}$.

*) $0 \sim 3$ olduğundan $[0]=[3]$ (Veya $3 \sim 45$ olduğundan $[3]=[45]$)

*) $0 \nsim 1$ olduğundan $[0] \cap [1] = \emptyset$.

*) $\{[0],[1],[2]\}$, $\mathbb{N}$'nin bir ayrışımıdır.

Bölüm Tasviri: X bir küme ve $\sim$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bütün denklik sınıflarının $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ kümesine X'in $\sim$ ile belirlenen <u>bölüm kümesi</u> denir. X'den bölüm kümesi üzerine doğal tasvir (fonksiyon)

$$q: X \to X/\sim, \qquad q(x) = [x]$$

fonksiyonuna bölüm tasviri (fonksiyonu) denir.

Kümelerin kuvveti; Sayılabilirlik, Kardinalite

X ve Y herhangi iki küme olsun. Eğer X'den Y'ye bire-bir ve üzerine bir fonksiyon varsa, X ile Y aynı elemana sahiptir (veya aynı kuvvete sahiptir, veya aynı kardinale sahiptir veya denktir) denir.

X kümesi, $\{1,2,3,\dots,n\}$ kümesi ile aynı kardinale (denk) sahip ise sonlu küme, aksi durumda sonsuz küme denir. X kümesi, $\mathbb{N}$ veya $\mathbb{N}$'nin herhangibir alt kümesi ile aynı kardinale sahip ise X kümesine sayılabilir küme, aksi durumda (sayılabilir değil) sayılamaz küme denir. Örneğin, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{1,2,3,\dots,n\}$ sayılabilir kümeler, $\mathbb{R}$ sayılamaz kümedir.

Teorem: (Bernstein-Schröder) X'den Y'ye bire-bir f ve Y'den X'e bire-bir bir g tasviri (fonksiyonu) varsa X ve Y aynı kardinaliteye sahiptir.

Bazı Sayılabilirlik Özellikleri:

*) Bir sonlu kümenin, herhangi bir alt kümesi sonludur.

*) Bir sayılabilir kümenin, herhangi bir alt kümesi sayılabilirdir.

*) Her sonsuz kümenin, sayılabilir bir alt kümesi vardır.

*) Sayılabilir bir kümenin, her sonsuz alt kümesi sayılabilirdir.

*) Sayılabilir sayıda, sayılabilir kümelerin birleşimi sayılabilirdir.

*) A ve B kümeleri sayılabilir ise $A \times B$ kümesi sayılabilirdir.

*) $[0,1]$ aralığında bulunan bütün gerçel (reel) sayıların kümesi sayılamaz bir kümedir.

$[0,1]$ aralığında bulunan bütün gerçel sayılar kümesine denk olan bir kümeye kontinyum kuvvetindedir denir ve genelde c ile gösterilir.

Teorem: Sayılabilir sayıda kontinyum kümelerin birleşimi kontinyum kuvvettedir.

Teorem: I kontinyum kuvvetinde ve $\forall \alpha \in I$ için A_α kümeleride kontinyum kuvvetinde olsunlar. Bu durumda $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ kümesi de kontinyum kuvvetindedir.

$[0,1]$'den $\mathbb{R}$'ye giden bütün gerçel değerli fonksiyonlar kümesini $c[0,1]$ ile gösterelim. $c[0,1]$ kuvveti, kontinyumdan daha büyük olan bir kümedir.

Teorem: Herhangi X kümesinin kuvvet kümesi 2^X $(P(X))$'in kuvveti, X'in kuvvetinden daha büyüktür. (X'in alt kümeler ailesinin eleman sayısı, X'in eleman sayısından fazladır.)

$X = \{1,2,3\}$ üç elemanlı, $2^X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ 8 elemanlı

X sayılabilir ise 2^X kontinyum kuvvette

X kontinyum kuvvette ise 2^X $c[0,1]$ kuvvetindedir.

Kontinyum Hipotezi (Cantor)

Kardinalitesi, rasyonel sayılar ile gerçel sayılar arasında bulunan bir küme yoktur.

Cantor, 1878'de bu hipotezi öne sürmüştür. 1900 yılında, Paris'te yapılan Uluslararası Matematik Kongresinde, Hilbert problemleri olarak adlandırılan, Hilbert'in ilan ettiği 23 problemden biridir.

1940 yılında Kurt Gödel, CH (Continuum hypothesis) doğru ise ZFC (Zermelo-Fraenkel axioms + axiom of choices) den bağımsız olduğunu gösterdi.

1963 yılında Paul Cohen, CH yanlış ise ZFC'den bağımsız olduğunu (Yani $\neg$(CH) + ZFC tutarlı) olduğunu gösterdi.

Bu sonuçlara göre, CH'nin doğru veya yanlış olduğunu şimdiki sistem içinde kanıtlayamayız.